О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Мерлин, Н. И. Мерлина

Чувашский государственный университет, г. Чебоксары
merlina@chuvsu.ru

На отрезке $J=[\alpha;\beta]$ рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$\left(K^0\varphi\right)(x)=a(x)\varphi(x)+b(x)(S\varphi)(x)=f(x),\ x\in J^0=(\alpha;\beta),$$
$$x\neq x_j,\ x_j\in J^0,\ j=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где сингулярный интегральный оператор вида

$$(S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}.$$

Коэффициенты уравнения (1) $a(x),b(x)\in H^\lambda(J)$, $a^2(x)+b^2(x)\equiv 1$, правая часть уравнения (1) берется в виде

$$f(x)=\frac{F(x)}{\omega(x)},\ F(x)\in H^\lambda(J),\ \omega(x)=\prod_{j=1}^n\left(x-x_j\right). \tag{2}$$

Решение $\varphi(x)$ уравнения (1) ищется в классе функций, представимых в виде

$$\varphi(x)=\frac{\psi(x)}{\omega(x)}, \tag{3}$$

где $\psi(x)\in H^*(\alpha;\beta)$ (здесь $H^*(\alpha;\beta)$ - известный класс Н.И. Мусхелишвили). Задача (1) - (3) по своей постановке примыкает к работе [1].

Приближенное решение СИУ (1) строится для функции $\psi(x)$ из (3). Для этого сначала получаем СИУ относительно функции $\psi(x)$:

$$\left(\widetilde{K}\psi\right)(x)=a(x)\psi(x)+\frac{b(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{\omega(x)}{\omega(\tau)}\frac{\psi(\tau)}{\tau-x}d\tau=F(x),\ x\in(\alpha;\beta), \tag{4}$$

а затем правую часть аппроксимируем последовательностью полиномов С.Н.Бернштейна [2]

$$B_m(F;x)=\sum_{k=0}^m F\left(\alpha+\frac{(\beta-\alpha)k}{m}\right)C_m^k\left(\frac{x-\alpha}{\beta-x}\right)^k\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)^{m-k}, \tag{5}$$

о которой известно, что $\{B_m(F;x)\}$ равномерно стремится к $F(x)$ на J и, кроме того, последовательность $\{B_m(F;x)\}$ сходится к $F(x)$ по норме пространства $L_p(J)$, $p>1$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы решение уравнения (1) имело неинтегрируемые особенности в точках* $x_1, ..., x_n$, *является выполнение следующих неравенств:*

$$a(x_k)\neq 0,\ F(x_k)\neq 0 \quad k=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если индекс κ уравнения (4) положителен, то система уравнений*

$$\begin{gathered}\widetilde{K}\psi = F, \\ \int_\alpha^\beta \psi(\tau)\tau^{k-1}d\tau = A_k,\ k=\overline{1,\kappa},\end{gathered} \tag{7}$$

имеет в классе $H^*(\alpha;\beta)$ *единственное решение.*

Теорема 3. *Если индекс κ уравнения (4) отрицателен и уравнение (4) неразрешимо, то всегда можно подобрать такие постоянные* D_1, ..., $D_{-\kappa}$, *что уравнение*

$$\widetilde{K}\psi = F - \sum_{k=1}^{-\kappa} D_k b(x) x^{k-1}$$

разрешимо в $H^*(\alpha;\beta)$ *и притом единственным образом.*

Теоремы 2, 3 являются аналогом условий Шешко М.А. и доказываются по его методу [3].

Рассмотрим теперь уравнение

$$\widetilde{K}\psi_m = B_m F(x). \tag{8}$$

Случай 1. κ>0. Тогда к уравнению (8) присоединяем условия (7)

$$\int_\alpha^\beta \psi_m(\tau)\tau^{k-1}d\tau = A_k,\ k=\overline{1,\kappa}. \tag{9}$$

В силу теоремы 2 задача (8) - (9) будет иметь единственное решение в выбранном классе Н.И.Мусхелишвили, и за приближенное решение уравнения (1) возьмем функцию

$$\varphi_m(x) = \frac{\psi_m(x)}{\omega(x)}. \tag{10}$$

Случай 2: κ=0. Этот случай очевиден.

Случай 3: κ<0. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{K}\psi_m = (B_m F)(x) - \sum_{k=1}^{-\kappa} D_{k,m} b(x) x^{k-1}, \tag{11}$$

где $D_{k,m}$ определены однозначно из условий разрешимости как единственное решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, причем это решение линейным образом зависит от $B_m F$. Последнее означает, что при стремлении $m \to \infty$ постоянные $D_{k,m}$ стремятся к нулю и в пределе уравнение (11) совпадает с уравнением (4).

Таким образом, приближенное решение уравнения (1) во всех случаях определяется по формуле (10).

На основании леммы 4.2 ([4], стр. 31) доказывается

Теорема 4. *Если точки α и β не являются точками автоматической ограниченности, то для каждого класса Н.И. Мусхелишвили $H^*(\alpha;\beta)$ можно указать такое число $p>1$, что оператор R: $H(J) \to H^*(\alpha;\beta) \subset L_p(J)$,*

$$(RF)(x) = a(x)F(x) - b(x)Z(x)\left(S\frac{F}{Z}\right)(x),$$

дающий частное решение СИУ (4), ограничен по норме пространства L_p.

Отсюда непосредственно вытекает оценка погрешности приближенного решения

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L_p(\rho)} \leq const \cdot \omega\left(F;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_C,$$

где $\omega(g;\delta)_C$ - модуль непрерывности функции $g \in H^\lambda(J) \subset C(J)$, $L_p(\rho)$ - пространство с весом $|\omega(x)|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мерлин А.В. *О несуммируемых решениях сингулярного интегрального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – №6. – С. 88-95.

2. Жук В.В., Кузютин В.Ф. *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* - Санкт-Петербург. Изд-во СПб. ун-та. – 1995. – 352 с.

3. Шешко М.А. *Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с помощью вычетов.* - Дисс… д-ра физ.-мат. наук, 1992.

4. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* – Кишинев: Штиинца, 1973. – 360 с.